Шамин Роман Вячеславович

# Курс лекций по дифференциальным уравнениям

Москва — 2017

УДК 517.98
ББК 22.16
Ш19

**Шамин Р.В.**
Курс лекции по дифференциальным уравнениям. М.: 2017. — —

Книга представляет собой конспект лекций по дифференциальным уравнениям. Лекции написаны максимально доступно с большими комментариями для неспециалистов.

Книга будет полезна студентам и всем желающим изучить основы математического анализа.

# Оглавление

# Введение

Настоящий курс лекций по дифференциальным, читается автором в Российском университете дружбы народов для бакалавров.

Стиль изложения ориентирован на студентов, изучающих высшую математику впервые, поэтому многие понятия и доказательства разъясняются и подробно комментируются.

**Примечание.** *Данный текст лекций является предварительным и незаконченным. Лекции пополняются еженедельно. Обратитесь на сайт calcs.ru за последней версией лекций.*

# Глава I

# Примеры и постановка задачи для дифференциальных уравнений

## 1. Примеры дифференциальных уравнений

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение следующего вида

$$\Phi(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0, \tag{I.1}$$

где независимое переменное $t$ принимает значения из связного множества $I \subset \mathbb{R}$, а функция $y(t)$ и ее производные вплоть до порядка $n$ определены при $t \in I$. При этом будем считать, что функция $\Phi$ такова, что она фактически зависит от $y^{(n)}$. Тогда это уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением $n$-го порядка. Кроме обыкновенных дифференциальных уравнений бывают дифференциальные уравнения в частных производных, но мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому слово «обыкновенные» будем обыкновенно опускать.

Примерами дифференциальных уравнений являются следующие уравнения

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t),$$
$$(y'(t))^2 = \sin y(t).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать различные классы дифференциальных уравнений.

Приведем некоторые примеры, когда возникают дифференциальные уравнения. Пусть мы рассматриваем некоторый процесс $y(t)$, который разворачивается во времени. Часто скорость этого процесса, т.е. его производная $y'(t)$ может быть выражена через известные функции, например, если корабль идет (для простоты по прямой), то его путь $y(t)$ может быть определен по скорости следующим дифференциальным уравнением

$$y'(t) = v(t),$$

где $v(t)$ есть скорость движения.

Далее, часто оказывается, что скорость некоторого процесса определяется не только временем, но и текущим значением этого процесса. В качестве процесса рассмотрим количество бактерий, которые быстро размножаются делением. В ситуации, когда питания достаточно можно считать, что скорость их роста пропорциональна их количеству

$$y'(t) = \alpha y(t), \tag{I.2}$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент скорости размножения. Предполагая, что в начальный момент количество бактерий было равно единице измерения, то получаем следующий закон размножения

$$y(t) = e^{\alpha t}$$

Еще одним важным источником дифференциальных уравнений является второй закон Ньютона. По-школьному этот закон звучит, как $F = ma$. Если мы обозначим координату нашего тела в момент времени $t$ через $y(t)$, то скорость будет равна $y'(t)$, а ускорение

$$a(t) = y''(t).$$

Второй закон Ньютона утверждает, что

$$my''(t) = F(t, y(t), y'(t)),$$

где сила может зависеть не только от времени, но от координаты и скорости тела.

Аристотель считал, что скорость падения тела пропорциональная его весу (массе), но уже Галилей показал, что ускорение свободного падения не зависит от массы, а является постоянной. Направим ось $y$ вертикально вниз и рассмотрим уравнение Ньютона для свободного падения тела с массой $m$. Поскольку на такое тело действует сила $F = mg$, где $g = 9.81$ м/$c^2$, то имеем

$$my''(t) = mg.$$

Сокращая массу (которую, конечно, мы считаем $m > 0$) получаем дифференциальное уравнение

$$y''(t) = g. \tag{I.3}$$

Если предположить, что при $t = 0$ положение тела и его скорость были равны нулю, то находим решение этого уравнения

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Отсюда, действительно, следует, что траектория движения не зависит от массы тела. Но в жизни если мы возьмем воздушный шарик массой 10 г и гирю весом 16 кг, то увидим, что гиря полетит вниз намного быстрее! Что бы объяснить эту ситуацию мы используем тоже дифференциальные уравнения, но вначале вспомним, что на тело, падающее в воздухе, действует также сопротивление воздуха, которое пропорционально скорости тела. Запишем Дифференциальное уравнение в этом случае на основании второго закона Ньютона

$$my''(t) = mg - \lambda y'(t),$$

где $\lambda > 0$ — это коэффициент сопротивления воздуха. Значение этого коэффициента зависит от формы тела, его поверхности, плотности воздуха, но не зависит от массы тела. Снова поделим на массу, получаем

$$y''(t) = g - \frac{\lambda}{m}y'(t).$$

Из этого уравнения видно, что для тела с меньшей массой сила ускорение, которое возникает из-за сопротивления воздуха, будет больше, чем аналогичное сопротивление для тела с большей массой.

Дифференциальные уравнения имеют огромное значение почти во всех естественных науках, а также в социальных.

## 2. Задача Коши

Прежде чем переходить к определению решения дифференциального уравнения обратим внимание на то, что дифференциальные уравнение имеют не единственное решение. Например уравнение (I.2) имеет бесконечное семейство решений

$$y(t) = Ce^{\alpha t},$$

где $C$ — любая константа. Причем эта константа может иметь смысл в начальном количестве бактерий.

Уравнение (I.3) имеет семейство решений, зависящее от двух констант

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,$$

где $C_1$ есть начальная скорость тела, а $C_2$ — начальное положение тела.

При этом порядок уравнение определяет количество констант, от которых зависит семейство решений дифференциальных уравнений.

**Определение 2.1.** Функция $y(t)$, заданная при $t \in I$, называется частным решением уравнения (I.1), если эта функция имеет $n$ производных и обращает уравнение (I.1) в тождество.

**Определение 2.2.** Для дифференциального уравнения $n$-го порядка (I.1) общим решением (или общим интегралом) назовем функцию

$$y = y(t, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

зависящую от времени и от $n$ констант, такую, что любое частное решение уравнения (I.1) может быть получено соответствующим выбором констант $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Обычно, имея общее решение, мы находим частное из условия, чтобы решение принимало заданные значения в указанный момент времени $t$. Рассмотрим дифференциальное уравнение с начальными условиями

$$\begin{aligned}
&\Phi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0,\\
&y(t_0) = y_0,\\
&y'(t_0) = y_1,\\
&\dots\\
&y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},
\end{aligned} \tag{I.4}$$

где $t_0 \in I$, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

**Определение 2.3.** Уравнение с начальными условиями (I.4) называется задачей Коши. А ее решение — непрерывно дифференцируемая на $I$ функция $y(t)$, удовлетворяющая (I.4) — называется решением задачи Коши.

## 3. Системы дифференциальных уравнений

Помимо дифференциальных уравнений рассматривают также системы дифференциальных уравнений. Пусть $x(t)$ есть векторно значная функция, заданная на связном множестве $I \subset \mathbb{R}$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим функцию

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n,$$

тогда системой $n$ дифференциальных уравнений назовем уравнение

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

где через $x'(t)$ мы обозначили производную векторно значной функции $x(t)$

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}.$$

Покажем, что любое дифференциальное уравнение $n$-го порядка можно представить в виде системы дифференциальных уравнений $n$-го порядка. Пусть мы имеем уравнение

$$\Phi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Введем обозначения

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = y'(t),\ \dots,\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Тогда имеем

$$\Phi(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), x'_n(t)) = 0.$$

Последнее соотношение можно записать в векторной форме

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

где $x(t)$ — векторно значная функция, составленная из компонент $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.

Например, уравнение колебания математического маятника

$$y''(t) + \omega^2 y(y) = f(t)$$

можно записать как систему дифференциальных уравнений первого порядка, состоящую из двух уравнений. Обозначим $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= x_2(t), \\ x'_2(t) &= f(t) - \omega^2 x_1(t). \end{aligned}$$

Для систем дифференциальных уравнений аналогично вводятся определения частного и общего решения, а также задачи Коши.

## 4. Частные случаи дифференциальных уравнений

Вопрос о существовании решений дифференциальных уравнений мы рассмотрим в следующей главе, а сейчас разберем некоторые элементарные способы нахождения решений дифференциальных уравнений в ряде частных случаях.

Рассмотрим уравнение первого порядка, которое имеет вид

$$y'(t) = f(t)g(y(t)),$$

которое называется — уравнение с разделяющимися переменными. Предполагая, что функции $f(t)$ и $g(y)$ непрерывны в рассматриваемой области, а функция $g(y)$ отлична от нуля, посмотрим, как можно найти решение этого уравнения. Делением на $g(y(t))$ получаем

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t).$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))}dt = \int f(t)dt + C.$$

или

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt + C.$$

Вычисляя эти неопределенные интегралы получаем соотношение

$$H(y) = F(t) + C,$$

которое дает нам решение в неявном виде. Но поскольку функция $g(y) \neq 0$, то она не меняет знак, поэтому функция $H(y)$ является строго монотонной, а значит наше решение можно представить в виде

$$y(t) = H^{-1}(F(t) + C).$$

Примером уравнения с разделяющимися переменными является уравнение

$$y'(t) = ay(t).$$

Имеем

$$\int \frac{y'(t)dt}{y(t)} = \int adt + \tilde{C}$$

или

$$\ln y(t) = at + \tilde{C}.$$

Далее

$$y(t) = e^{\tilde{C}}e^{at}.$$

Константа $\tilde{C}$ представляет собой любое число, которое мы можем представить в виде $\ln C$, где $C \in (0, \infty)$, тогда в итоге имеем общее решение в виде

$$y(t) = Ce^{at}.$$

Еще одним важным примером дифференциального уравнения первого порядка являются линейные уравнения вида

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

Если $b(t) = 0$, то такое уравнение называется линейным однородным, иначе — линейным неоднородным. Сначала рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y'(t) = a(t)y(t),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Это уравнение имеет следующее решение

$$\int \frac{y'dt}{y} = \int a(t)dt + C_1,$$

$$|y(t)| = e^{C_1}e^{\int a(t)dt}.$$

Избавляясь от модуля, получаем

$$y(t) = Ce^{\int a(t)dt},$$

где $C$ произвольная константа. Причем значение $C = 0$ охватывает случай, когда $y = 0$, который мы исключили при делении на $y$.

Чтобы найти общее решение линейного неоднородного уравнения воспользуемся методов вариации постоянной. Предположим, что $C = C(t)$ и подставим функцию $y(t) = C(t)e^{\int a(t)dt}$ в уравнение. Получим

$$C'(t)e^{\int a(t)dt} + C(t)(a(x)e^{\int a(t)dt}) = a(t)C(t)e^{\int a(t)dt} + b(t).$$

Сокращая, получаем дифференциальное уравнение на функцию $C(t)$

$$C'(t)e^{\int a(t)dt} = b(x).$$

Последнее уравнение можно решить (в квадратурах) и найти функцию $C(t)$, которая снова будет содержать в себе произвольную константу $C_1$

$$C(t) = \int b(x)e^{-\int a(s)ds}dt + C_1.$$

В итоге общее решение линейного неоднородного уравнения будет

$$y(t) = C(t)e^{\int a(t)dt} = \left(\int b(x)e^{-\int a(s)ds}dt + C_1\right)e^{\int a(t)dt}.$$

# Глава II

# Существование и единственность решений

## 1. Нормальная форма

Когда мы определяли обыкновенное дифференциальное уравнение мы рассматривали общую функциональную зависимость искомой функции и ее производных. Однако в этом случае почти всегда имеет смысл разрешить это уравнение, выразив старшие производные через остальные функции. Разумеется, что при этом мы можем получит несколько уравнений. Например, из уравнения

$$(y'(t))^2 = y(t)$$

мы получаем два уравнения

$$y'(t) = \sqrt{y(t)}$$

и

$$y'(t) = -\sqrt{y(t)}.$$

Однако вопросы решения таких уравнений не имеют специфики дифференциальных уравнений, поэтому мы будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения в виде

$$y^{(n)}(t) = \varphi(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)).$$

Для систем дифференциальных уравнений мы будем использовать следующую форму записи

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\
&\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\
&\ldots \\
&\dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))
\end{aligned}$$

Или в векторной форме

$$x'(t) = F(t, x(t)).$$

Такая форма записи системы дифференциальных уравнений называется нормальной формой.

## 2. Существование решения задачи Коши

Существование решения задачи Коши мы будем доказывать для системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.

Для доказательства существования решения задачи Коши нам понадобится теорема Арцела-Асколи. Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывных функций $\{z_n(t)\}$. Эта последовательность называется равномерно ограниченной, если

$$|z_n(t)| \leq K,$$

где $K$ не зависит ни от $t$, ни от $n$.

Последовательность непрерывных функций называется равностепенно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых $t', t'' \in [a, b]$ таких, что $|t' - t''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|z_n(t') - z_n(t'')| < \varepsilon,$$

для всех $n$.

Если последовательность $z_n(t)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций и имеет место неравенство

$$|z_n'(t)| < L,$$

для всех $n$, где $L$ от $n$ не зависит, то эта последовательность будет равностепенно непрерывной.

**Теорема 2.1** (Теорема Арцела-Асколи). *Из любой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности функций на отрезке можно извлечь сходящуюся равномерно подпоследовательность.*

Для чисел $t_0$, $a$, $b$ и вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ введем множество $R$ следующим образом

$$R = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b\}.$$

Мы будем рассматривать следующую задачу

$$\begin{aligned} &x'(t) = F(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + a] \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{II.1}$$

**Теорема 2.2** (Теорема Пеано). *Пусть функция $F$ непрерывна в $R$ и удовлетворяет оценке $|F(t,x)| \leq M$, для $(t,x) \in R$. Тогда задача Коши* (II.1) *имеет по крайней мере одно решение на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$, где $\alpha = \min\{a, b/M\}$.*

*Доказательство.* Фиксируем произвольное $\delta > 0$. Построим непрерывно дифференцируемую функцию $x^0(t)$ на $[t_0 - \delta, t_0]$ такую, что:

$$x^0(t_0) = x_0,$$

$$x'(t_0) = F(t_0, x_0),$$

$$|x^0(t) - x_0| \leq b,$$

$$|x'^0(t)| \leq M.$$

Покажем, что для $0 < \varepsilon \leq \delta$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha]$ существует такая функция $x^\varepsilon(t)$, что $x^\varepsilon(t) = x^0(t)$, при $t \in [t_0 - \delta, t_0]$, а при $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$

$$x^\varepsilon(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x^\varepsilon(s - \varepsilon))ds. \tag{II.2}$$

Формула (II.2) определяет функцию $x^\varepsilon(t)$ как продолжение функции $x^0(t)$ на отрезок $[t_0, t_0 + \alpha_1]$, где $\alpha_1 = \min\{\alpha, \varepsilon\}$. По построению на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha_1]$ функция $x^\varepsilon(t)$ непрерывно дифференцируема, кроме того,

$$|x^\varepsilon(t) - x^0(t)| \leq b. \tag{II.3}$$

Далее по формуле (II.2) можно определить функцию $x^{\varepsilon}(t)$ на отрезок $[t_0-\delta, t_0+\alpha_2]$, где $\alpha_2 = \min\{\alpha, 2\varepsilon\}$, с сохранением неравенства (II.3). Продолжая таким образом, мы получим, что функция $x^{\varepsilon}(t)$ определена на $[t_0-\delta, t_0+\alpha]$.

Поскольку $|x^{\varepsilon}(t)| \leq M$, то семейство функций $\{x^{\varepsilon}(t)\}$, $0 < \varepsilon \leq \delta$ является равностепенно непрерывным. Следовательно, по теореме Арцела-Асколи можно выделить такую последовательность $\varepsilon_n \to 0$, что на $[t_0-\delta, t_0+\alpha]$ существует равномерный предел

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x^{\varepsilon_n}(t).$$

Из равномерной непрерывности функции $F(t, x$ следует, что последовательность

$$F(t, x^{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n))$$

при $n \to \infty$ стремится к $f(t, x(t))$. Следовательно, в равенстве (II.2) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ допустим предельный переход, в результате которого мы получаем

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds.$$

От сюда следует, что функция $x(t)$ является решением задачи Коши (II.1) на $[t_0, t_0+\alpha]$. $\square$

Заметим, что, вообще говоря, мы не можем надеяться на существования глобального решения дифференциального уравнения даже в случае бесконечно гладкой правой части. Например, задача Коши

$$x'(t) = x^2(t) + 1,$$

$$x(0) = 0$$

Имеет решение на $[-\pi/2, \pi/2]$

$$x(t) = \operatorname{arctg} t,$$

которое не продолжается вне этого отрезка.

# 3. Единственность решения задачи Коши

В условиях теоремы Пеано мы не можем рассчитывать на единственность решения. Действительно, рассмотрим задачу Коши

$$x'(t) = \sqrt{x(t)},$$

$$x(0) = 0.$$

Очевидно, что эта задача имеет решение $x(t) = 0$, но решая эту задачу методом разделения переменных, можно найти еще решение

$$x(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Чтобы обеспечить единственность задачи Коши нам необходимо наложить на правую часть большую гладкость, чем просто непрерывность.

Докажем сначала одно неравенство.

**Теорема 3.1** (Неравенство Гронуолла)**.** *Пусть $u(t)$, $v(t)$ суть неотрицательные функции непрерывные на отрезке $[a, b]$. Если для некоторой константы $C \geq 0$ выполнено неравенство*

$$v(t) \leq C + \int\limits_a^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [a, b], \tag{II.4}$$

*то имеет место следующее неравенство*

$$v(t) \leq C \exp\left(\int\limits_a^t u(s)ds\right), \quad t \in [a, b]. \tag{II.5}$$

*Доказательство.* Сначала рассмотрим случай $C > 0$. Обозначим через $V(t)$ правую часть неравенства (II.4). Тогда имеем

$$v(t) \leq V(t)$$

и

$$0 < C \leq V(t).$$

Кроме того,

$$V'(t) = u(t)v(t).$$

Следовательно,

$$V'(t) \le u(t)V(t).$$

Поскольку $V(t) > 0$, то

$$\frac{V'(t)}{V(t)} \le u(t).$$

Интегрируя это неравенство на $[a, t]$ и учитывая, что $V(a) = C$, получаем

$$V(t) \le C \exp\left(\int_a^t u(s)ds\right).$$

Учитывая неравенство $v(t) \le V(t)$ отсюда получаем (II.5).

Если теперь $C = 0$, то неравенство (II.5) будет верно для любого $C > 0$, поэтому переходя к пределу при $C \to 0$ получаем, что

$$v(t) = 0.$$

□

**Определение 3.1.** Мы будем говорить, что функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $x$ на $R$, если существует такая константа $L > 0$, что

$$|F(t, x') - F(t, x'')| \le L(t)|x' - x''|,$$

для всех $(t, x'), (t, x'') \in R$.

**Теорема 3.2.** *Пусть к условиям теоремы Пеано дополнительно добавлено условие Липшица по переменной $x$ на $[t_0, t_0+\alpha]$, тогда задача Коши не может иметь более одного решения.*

*Доказательство.* Предположим, что задача Коши имеет два решения $x^1(t)$ и $x^2(t)$, тогда мы имеем

$$x^i(t) = x_0 + \int_a^t F(s, x^i(t))ds, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно функция $y(t) = x^1(t) - x^2(t)$ удовлетворяет равенству

$$y(t) = \int_a^t (F(s, x^1(s)) - F(s, x^2(s)))ds.$$

В силу условия Липшица отсюда следует, что

$$|y(t)| \leq \int\limits_a^t L|x^1(s) - x^2(s)|ds = L\int\limits_a^t |y(s)|ds.$$

По лемме Гронуолла мы получаем, что $y(t) = 0$ и $x^1(t) = x^2(t)$. $\square$

# Глава III

# Линейные дифференциальные уравнения

## 1. Линейные системы

В этой главе мы будем рассматривать системы линейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t),\\
&\dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t),\\
&\ldots\\
&\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t).
\end{aligned}$$

Эту систему мы будем записывать в векторном виде

$$\dot{x}(t) = A(t)a(t) + f(t),$$

где

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать эту систему на отрезке $[a, b]$, предполагая, что все функции $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ на этом отрезке непрерывны.

Вместе в этой системой мы будем рассматривать также и задачу Коши с начальным условием

$$x(t_0) = x^0,$$

где $t_0 \in [a, b]$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Покажем, что задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений всегда имеет единственное решение на всем отрезке $[a, b]$. Первым делом заметим, что эта система удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Поскольку функция

$$F(t, x) = A(t)x + f(t)$$

имеет непрерывные производные по $x$ и, соответственно, эта функция удовлетворяет условию Липшица.

Далее возьмем $t_0 = a$ и покажем, что задача Коши имеет решение на отрезке $[a, b]$. Согласно теореме Пеано наша задача Коши имеет решение на отрезке $[a, \min\{b, a + K/M\}]$, где $M$ такая константа, что

$$|A(t)x(t) + f(t)| \le M,$$

при $(t, x) \in R$, где множество $R$ определяется по следующим образом

$$R = \{(t, x) : t \in [a, b], |x - x^0| \le K\}.$$

В силу непрерывности коэффициентов и правой части нашей системы мы имеем оценку

$$|A(t)x(t) + f(t)| \le L(|x| + 1),$$

где $L$ не зависит от $t$ и от $x$. Поэтому для любого $K > 0$ решение существует на отрезке

$$[a, \min\{b, a + K/(L(|x| + 1))\}].$$

Поскольку из неравенства $|x-x^0| \le K$ следует оценка $|x| \le (K+|x^0|)$, то решение будет существовать как минимум на отрезке

$$[a, \delta(K)],$$

где $\delta(K) = \min\{b, a + K/(L(K + |x^0| + 1))\}$. Учитывая, что

$$\lim_{K\to\infty} \delta(K) = \min\{b, C^{-1}\},$$

то для достаточно больших $K$ решение существует на некотором отрезке $[a, a + \delta_0]$, где $\delta_0$ не зависит от $t_0$ и $x^0$. Поэтому продолжая эту процедуру, мы убеждаемся, что решение задачи Коши существует на всем $[a, b]$.

## 2. Линейная зависимость функций

Будем рассматривать набор векторно значных функций $x^k(t)$, $k = 1, 2, \dots, k$ при $t \in [a, b]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

**Определение 2.1.** Функции $x^k(t)$ линейно зависимы на $[a, b]$, если существуют такие постоянные $c_1, c_2, \dots, k$ не все равные нулю, что при всех $t \in [a, b]$ имеем

$$c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_k x^k(t) = 0. \tag{III.1}$$

**Определение 2.2.** Функции $x^k(t)$ линейно независимы на $[a, b]$, если равенство (III.1) при всех $t \in [a, b]$ возможно только при

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

Рассмотрим сейчас набор $n$ функций $x^1(t), \dots, x^n(t)$ на отрезке $[a, b]$. Составим из этих функций детерминант

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix}$$

Этот детерминант называется определителем Вронского или вронскианом.

**Теорема 2.1.** *Если функции $x^1(t), \dots, x^n(t)$ линейно зависимы, то определитель Вронского равен нулю*

$$W(t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

*Доказательство.* В случае линейной зависимости этих функций, столбцы определителя будут линейно зависимыми и, следовательно, определитель будет равен нулю. □

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{III.2}$$

**Теорема 2.2.** *Пусть функции $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ являются решениями уравнения* (III.2)*. Если их вронскиан равен нулю хоть в одной точке, то эти функции линейно зависимые и $W(t) = 0$ при всех $t \in [a, b]$.*

*Доказательство.* Пусть $t_1 \in [a, b]$ такое, что $W(t_1) = 0$. Следовательно, векторы $x^1(t_1), \dots, x^n(t_1)$ будут линейно зависимыми, поэтому существует не все равные нулю числа $c_1, \dots, c_n$ такие, что

$$c_1 x^1(t_1) + c_2 x^2(t_1) + \dots + c_n x^n(t_1) = 0.$$

Построим новую векторно значную функцию

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_n x^n(t).$$

Она также будет решением уравнения (III.2), кроме того $x(t_1) = 0$. Нулевая функция $z(t) = 0$ тоже удовлетворяет уравнению (III.2) и начальному условию $z(t_1) = 0$, поэтому в силу единственности решения задачи Коши мы имеем

$$x(t) = z(t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

Следовательно, функции $x^1(t), \dots, x^n(t)$ линейно зависимые функции, поэтому $W(t) = 0$. □

## 3. Фундаментальная система решений

При изучении систем линейных дифференциальных уравнений принципиальным понятием является фундаментальная система решений.

**Определение 3.1.** Любая система $n$ линейно независимых решений (III.2) называется фундаментальной системой решений.

Покажем, что для любой системы линейных дифференциальных уравнений существует фундаментальная система решений. Выберем $n$ линейно независимых векторов $x^{01}, x^{02}, \ldots, x^{0n} \in \mathbb{R}^n$. Построим функции $x^k(t)$ как решения задачи Коши для уравнения (III.2) с начальным условием

$$x^k(a) = x^{0k}.$$

Поскольку вектора $x^k(0)$ линейно независимы, то и функции $x^k(t)$ линейно независимы на $[a, b]$.

Фундаментальная система решений может служить для построения любых решений системы линейных дифференциальных уравнений.

**Теорема 3.1.** *Пусть $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$ — фундаментальная система решений. Пусть $x(t)$ некоторое решение системы* (III.2), *тогда существуют такие константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что*

$$x(t) = c_1 x^(t) + c_2 x^2(t) + \cdots + c_n x^n(t). \tag{III.3}$$

*Доказательство.* Возьмем любое $t_0 \in [a, b]$. Запишем равенство (III.3) при $t = t_0$, считая константы $c_k$ неизвестными

$$\begin{array}{l} x_1(t_0) = c_1 x_1^1(t_0) + \cdots + c_n x_1^n(t_0), \\ \ldots \\ x_n(t_0) = c_1 x_n^1(t_0) + \cdots + c_n x_n^n(t_0). \end{array}$$

Эта система (относительно неизвестных $c_k$) имеет единственное решение, поскольку ее определитель является определителем Вронского $W(t_0)$, который не равен нулю.

Таким образом, любое решение системы (III.2) можно представить в виде линейной комбинации функций из фундаментальной системы решений. □

Из последней теоремы следует, что фундаментальная система решений представляет собой базис в пространстве решений системы линейных дифференциальных уравнений.

**Определение 3.2.** Фундаментальной матрицей для системы (III.2) называется матрица $X(t)$, столбцы которой составляют фундаментальную систему решений.

Для фундаментальной матрицы имеет место

$$\det X(t) = W(t) \neq 0.$$

С помощью фундаментальной матрицы можно построить общее решение системы (III.2) по формуле

$$x(t, c_1, \ldots, c_n) = X(t)C,$$

где вектор $C$ составлен из констант $c_1, \ldots, c_n$.

## 4. Неоднородные системы

Сейчас мы будем рассматривать также неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t). \tag{III.4}$$

Если мы имеем фундаментальную матрицу для однородной системы $X(t)$, то мы можем найти решение для неоднородной системы методом вариации постоянных.

Будем искать частное решение системы (III.4) в виде

$$x(t) = X(t)C(t).$$

Подставляем эту функцию в (III.4) и получаем

$$X'(t)C(t) + X(t)C'(t) = A(t)X(t)C(t) + f(t).$$

Поскольку $X'(t) = A(t)X(t)$, то в итоге получаем

$$X(t)C'(t) = f(t).$$

Поскольку матрица $X(t)$ имеет ненулевой детерминант и поэтому обратима. В результате получаем

$$C'(t) = X^{-1}(t)f(t).$$

Отсюда получаем

$$C(t) = C^0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds,$$

где $C^0$ вектор из произвольных постоянных.

Таким образом получаем, что общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$x(t) = X(t)C^0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Из этой формулы следует, что общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

# Глава IV

# Краевые задачи

## 1. Краевые условия

Мы будем рассматривать краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Пусть мы имеем линейное дифференциальное уравнение

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{IV.1}$$

где функции $p(t)$ и $q(t)$ предполагаются непрерывными на $[a, b]$

Начальные условия задавались в одной точке, а краевые условия задаются в различных точках. В общем виде краевые условия записываются следующим образом

$$\begin{aligned} &\alpha y'(a) + \beta y(a) = c, \\ &\gamma y'(b) + \delta y(b) = d, \end{aligned} \tag{IV.2}$$

где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ и $|\gamma| + |\delta| \neq 0$. Если числа $c$ и $d$ одновременно равны нулю, то говорят об однородных краевых условиях.

Теорема о разрешимости краевой задачи (IV.1)–(IV.2) устанавливается следующей теоремой об альтернативе (альтернатива Фредгольма).

**Теорема 1.1** (Альтернатива Фредгольма). *Возможны только два случая: или 1) краевая задача имеет единственное решение при любых правых частях в уравнении и в краевых условиях, или 2) однородная задача с однородными краевыми условиями имеет бесконечно много решений, а неоднородная задача при некоторых правых* *частях имеет бесконечно много решений, а при всех других — не имеет решений.*

*Доказательство.* Общее решение уравнения (IV.1) без учета краевых условий имеет вид

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + v(t),$$

где $y_1(t)$, $y_2(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, а $v(t)$ — частное решение неоднородного уравнения. подставляя это общее решение в краевые условия (IV.2) и перенося $v(t)$ в правую часть, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно констант $c_1$, $c_2$. Коэффициенты этой системы не зависят от правых частей уравнения и правых частей краевых условий.

Если детерминант этой системы не равен нулю, то система имеет единственное решение для констант $c_1$ и $c_2$, поэтому общее решение с этими константами будет единственным решением краевой задачи.

Если детерминант равен нулю, то однородная система имеет бесконечно много решений относительно констант $c_1$ и $c_2$, но неоднородная система имеет решение не для всех правых частей. Если она имеет решение, то она имеет и бесконечно много решений, поскольку к этому решению можно добавить любое решение однородной системы, умноженное на любую константу. □

Рассмотрим пример уравнения

$$y''(t) + y = f(t), \quad t \in [0, \pi]$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения равно

$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Подставляя это решение в краевые условия, видим, что $c_2 = 0$, а $c_1$ может быть любым. То есть однородная задача имеет бесконечно много решений. Соответственно, при $f(t) \neq 0$ наша задача имеет решение не всегда. При $f(t) = 1$, частное решение имеет вид $y(t) = 1$, но это решение не удовлетворяет краевым условиям.

В тоже время если $f(t) = t^2 - \pi t + 2$, то краевая задача имеет следующие решения

$$y(t) = c_1 \sin t + t(t - \pi),$$

где $c_1$ — любое число.

# 2. Функция Грина

В этом разделе будем рассматривать однородные краевые условия. Для построения решений краевых задач используется функция Грина.

**Определение 2.1.** Функцией Грина для задачи (IV.1)–(IV.2) называется функция $G(t, s)$, определенная при $t \in [a, b]$, $s \in (a, b)$ такая, что:

- Для каждого $s = const$ функция $y(t) = G(t, s)$ при $t \neq s$ удовлетворяет однородному уравнению (IV.1).
- При $t = a$ и $t = b$ функция $y(t) = G(t, s)$ удовлетворяет краевым условиям (IV.2).
- При $t = s$ она непрерывна по $t$, а ее производная по $t$ имеет скачек, равный 1

$$\begin{aligned} &G(s + 0, s) = G(s - 0, s), \\ &G'(s + 0, s) = G'(s - 0, s) + 1. \end{aligned} \tag{IV.3}$$

**Теорема 2.1.** *Если при $f = 0$ краевая задача имеет только нулевое решение, то функция Грина существует и имеет вид*

$$G(t, s) = \begin{cases} Ay_1(t), & a \leq t \leq s, \\ By_2(t), & s \leq t \leq b, \end{cases} \tag{IV.4}$$

*где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ суть ненулевые решения однородного уравнения* (IV.1), *удовлетворяющие соответственно первому и второму краевым условиям, множители $A$ и $B$ зависят от $s$ и определяются условиями* (IV.3)

$$\begin{aligned} &A(s)y_1(s) = B(s)y_2(s), \\ &B(s)y_2'(s) = A(s)y_1'(s) + 1. \end{aligned} \tag{IV.5}$$

*Доказательство.* Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решения однородного уравнения (IV.1), такие что

$$y_1(a) = \alpha, \quad y_1'(a) = -\beta,$$

$$y_2(b) = \gamma, \quad y_2'(b) = -\delta.$$

Покажем, что эти решения линейно независимы. Действительно, предполагая, что они линейно зависимы, мы получим

$$y_1(t) = cy_2(t).$$

Из этого следует, что функция $y_2(t)$ удовлетворяет обоим краевым условиям, что невозможно, если $y_2(t) \neq 0$.

Раз, функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ линейно независимы, то любое решение однородного уравнения (IV.1) имеет вид

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Поскольку первому краевому условию удовлетворяет только $y_1(t)$, а второму только $y_2(t)$, то из требований 1) и 2) на функцию Грина следует, что функция Грина должна иметь вид (IV.4).

Из требования 3) на функцию Грина получаем условия (IV.5), но эта система разрешима относительно функций $A(s)$ и $B(s)$, поскольку ее детерминант

$$\begin{vmatrix} y_1(s) & -y_2(s) \\ -y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) \end{vmatrix} = W(s) \neq 0,$$

поскольку $y_1(s)$ и $y_2(s)$ линейно независимы. Следовательно, функция Грина существует и имеет вид (IV.4). □

Зная функцию Грина, которая определяется по однородному уравнению (IV.1), можно построить решение неоднородного уравнения.

**Теорема 2.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, тогда для любой непрерывной функции $f(t)$ решение краевой задачи* (IV.1)–(IV.2) *существует и выражается формулой*

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,s) f(s) ds. \tag{IV.6}$$

*Доказательство.* Разобьем интервал $(a, b)$ на части

$$a < s < t, \quad t < s < b.$$

Продифференцируем функцию (IV.6). В силу (IV.4) имеем

$$y'(t) = y_2'(t) \int\limits_a^t B(s)f(s)ds + y_1'(t) \int\limits_t^b A(s)f(s)ds. \tag{IV.7}$$

Подставим теперь функцию $y(t)$ в краевые условия. Поскольку $y_1(t)$ удовлетворяет первому краевому условию, а $y_2(t)$ — второму, то функция $y(t)$ удовлетворяет обоим краевым условиям.

Дифференцируем функцию $y'(t)$, определенную (IV.7), получаем

$$y''(t) = y_2''(t) \int\limits_a^t B(s)f(s)ds + B(t)y_2'(t)f(t)+$$

$$+y_1''(t) \int\limits_t^b A(s)f(s)ds - A(t)y_1'(t)f(t) =$$

$$y_2''(t) \int\limits_a^t B(s)f(s)ds + y_1''(t) \int\limits_t^b A(s)f(s)ds + f(t).$$

Подставляем $y(t)$, $y'(t)$ и $y''(t)$ в уравнение (IV.1), имеем

$$(y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)) \int\limits_a^t B(s)f(s)ds+$$

$$+(y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)) \int\limits_t^b A(s)f(s)ds + f(t) = f(t).$$

Учитывая, что $y_1(t)$ и $y_2(t)$ суть решения однородной задачи, мы видим, что $y(t)$ есть решение уравнения (IV.1). $\square$

# 3. Собственные функции и собственные значения

Рассмотрим уравнение

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = \lambda y(t) \tag{IV.8}$$

с краевыми условиями (IV.2), где $\lambda$ — вещественный параметр.

**Определение 3.1.** Значения $\lambda$, для которых задача (IV.8)–(IV.2) имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а сами ненулевые решения — собственными функциями.

Рассмотрим задачу

$$y''(t) = \lambda y(t), \quad t \in [0, \pi]$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения есть следующая функция

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}.$$

Но эта функция может удовлетворять краевым условиям только, когда $c_1 = c_2 = 0$, поэтому в этом случае собственных значений нет.

Для $\lambda = 0$ имеем общее решение

$$y(t) = c_1 t + c_2,$$

которое тоже удовлетворяет краевым условиям только при $c_1 = c_2 = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda < 0$. В этом случае имеем следующее общее решение

$$y(t) = c_1 \sin\sqrt{-\lambda}t + c_2 \cos\sqrt{-\lambda}t.$$

Подставляя эту функцию в краевые условия, получаем, что $c_2 = 0$, а для ненулевого $c_1$ должно выполняться равенство

$$\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\sqrt{-\lambda_k}\pi = \pi k, \quad k = 1, 2, \dots$$

или

$$\lambda_k = -k^2, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Поэтому для этой задачи собственные значения составляют множество

$$\{-1, -4, -9, \dots, -k^2, \dots\},$$

а соответствующие им собственные функции

$$y_k(t) = c \sin kt, \quad c \neq 0.$$

Собственные функции определяются лишь с точностью до умножения на ненулевую константу. Часто эту константу выбирают так, чтобы

$$\int\limits_a^b y_k^2(x)dx = 1.$$

Такие собственные функции будем называть нормированными собственными функциями. Для нашего примера из условия

$$c^2 \int\limits_0^\pi \sin^2 ktdt = 1$$

следует, что

$$c^2 \int\limits_0^\pi \frac{1 - \cos 2kt}{2} dt = 1,$$

$$c^2 \frac{\pi}{2} dt = 1.$$

Откуда

$$c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Поэтому нормированные собственные функции равны

$$y_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt.$$

# Глава V

# Динамические системы

## 1. Автономные системы

Система дифференциальных уравнений называется автономной, если ее правая часть не зависит от времени (независимой переменной)

$$\dot{x}(t) = f(x). \tag{V.1}$$

Вообще говоря, любую систему можно сделать автономной, если увеличить ее размерность, введя новую независимую переменную $s = t$ и добавив уравнение

$$\frac{dt}{ds} = 1.$$

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $\Phi \subset \mathbb{R}^n$. Будем также предполагать, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в области $\Phi$, тогда эту область мы будем называть фазовым пространством, а переменные $x_i$ — фазовыми координатами. Следовательно, для любой точки $x^0 \in \Phi$ на некотором отрезке $[t_0, t_1]$ существует единственное решение уравнения (V.1) такое, что

$$x(t_0) = x^0$$

и

$$x(t) \in \Phi, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Множество

$$G = \{x(t) : t \in [t_0, t_1]\} \subset \Phi$$

называется траекторией. Это множество может быть линией или точкой. Если траектория $G = \{a\}$ точка, то это возможно только при условии
$$f(a) = 0.$$
Такие точки называются стационарными или особыми, иногда их называют положениями равновесия. Если траектория содержит особую точку, то вся эта траектория состоит из одной этой точки.

**Теорема 1.1.** *Любые две траектории или не имеют общих точек, или совпадают.*

*Доказательство.* Пусть траектории решений $x(t)$ и $y(t)$ имеют общую точку $b$. Тогда существуют такие $t'$ и $t''$, что
$$b = x(t') = y(t'').$$

Тогда функция
$$z(t) = y(t + t'' - t')$$
тоже решение и $z(t') = y(t'') = x(t')$.

По теореме единственности $z(t) = x(t)$, то есть
$$y(t + t'' - t') = x(t).$$
Следовательно, решения $x(t)$ и $y(t)$ имеют одну и ту же траекторию. □

**Теорема 1.2.** *Решение автономной системы не может войти в особую точку за конечное время.*

*Доказательство.* Пусть $a$ — особая точка и $x^*(t) = a$ при всех $t$. Если траектории решений $x(t)$ и $x^*(t)$ не совпадают, то они не имеют общих точек, поэтому $x(t) \neq a$ при всех $t$. □

Поэтому решение $x(t)$ может приближаться к особой точке только при $t \to \pm\infty$.

**Определение 1.1.** Решение $x(t)$ называется периодическим решением, если существует такое $\tau >$, что $x(t) = x(t + \tau)$, и $x(t) \neq x(t + \tau')$, для всех $0 < \tau' < \tau$. При этом $\tau$ называется периодом решения.

# 2. Предельные множества траекторий

Пусть для автономной системы дифференциальных уравнений существует траектория решения $G$, определенного для всех $t$ таких, что $t_0 \leq t < \infty$. Точка $p \in \Phi$ называется $\omega$-предельной точкой называется, если существует такая последовательность $\{t_n\} \subset [t_0, \infty)$, которая $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Множество всех $\omega$-предельных точек обозначается через $\Omega(G)$.

Аналогично, если $G$ есть траектория решения, определенного на $(-\infty, t_0]$ вводится понятие $\alpha$-предельной точки.

Заметим, что для периодического решения все точки его траектории являются $\alpha$- и $\omega$-предельными точками.

# 3. Динамические системы

В этом разделе мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений, которая для всех $x^0 \in \Phi$ имеет решения $x(t)$ такие, что $x(t) = x^0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Такую систему будем называть динамической системой.

Через $\varphi(t,p)$ обозначим решение системы

$$\dot{x}(t) = f(x),$$

$$x(0) = p.$$

Тогда имеет место

$$\varphi(t, \varphi(t_1, p)) = \varphi(t + t_1, p). \tag{V.2}$$

Это равенство имеет место, поскольку при $t = 0$ оба решения проходят через одну точку $q = \varphi(t_1, p)$, а по теореме единственности они совпадают.

Можно дать определение абстрактной динамической системы. Пусть $D$ — произвольное непустое множество. Через $T$ обозначим либо $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$), либо $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$). Это множество называется временем динамической системы. Движением в множестве $D$ назовем отображение

$$S : D \times T \times T \to D,$$

которое удовлетворяет следующим аксиомам

1. $S(x^0, t_0, t_0) = x^0, \quad x^0 \in D,\, t_0 \in T$
2. $S(S(x^0, t_0, t_1), t_1, t_2) = S(x^0, t_0, t_2), \quad x^0 \in D,\, t_0, t_1, t_2 \in T.$

**Определение 3.1.** Тройка $\langle D, T, S\rangle$ называется динамической системой.

Если $T = \mathbb{R}$, то динамическая система называется непрерывной или с непрерывным временем, если $T = \mathbb{Z}$, то динамическая система называется дискретной или с дискретным временем.

Рассмотрим простейшую дискретную динамическую систему. Пусть $D = [0, 1]$, $T = \mathbb{N}$, а движение определим следующим образом

$$S(x, n, n+1) = \{Mx + b\},$$

где $M, b \geq 0$, а фигурные скобки означают операцию «взятия дробной части числа». Движение $S(x, n, m)$ определяется по рекуррентным формулам

$$S(x, n, m) = S(S(x, n, n+1), n, m-1).$$

Выбирая числа $M$ и $b$ таким образом можно получить генератор случайных чисел.

## 4. Устойчивость решений

Рассмотрим, вообще говоря, не автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{V.3}$$

и начальное условие

$$x(t_0) = x^0. \tag{V.4}$$

Пусть для всех $x^0$ из области $Q \subset \mathbb{R}^n$ решение $x(t)$ задачи Коши (V.3)–(V.4), определены при $[t_0, \infty)$.

**Определение 4.1.** Решение задачи Коши (V.3)–(V.4) $x(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $\tilde{x}^0 \in Q$ такого, что

$$|\tilde{x}^0 - x^0| < \delta$$

решение задачи Коши $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0$ удовлетворяет следующему условию

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, \infty).$$

**Определение 4.2.** Устойчивое по Ляпунову решение $x(t)$ задачи Коши (V.3)–(V.4) называется асимптотически устойчивым, если существует такое $\delta > 0$, что решение задачи Коши $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}^0 \in Q$ таким, что

$$|\tilde{x}^0 - x^0| < \delta,$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} |\tilde{x}(t) - x(t)| = 0.$$

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{V.5}$$

Через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ обозначим собственные значения матрицы $A$.

**Теорема 4.1.** *Пусть*

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0$$

*для всех собственных значений, тогда нулевое решение асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Любое решение уравнения (V.5) представимо в виде

$$x(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + P_m(t)e^{\lambda_m t},$$

где $P_j(t)$ — многочлены, у которых коэффициенты вектора из $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\lambda_j = a_j + ib_j$, тогда имеем

$$P_j(t)e^{\lambda_j t} = P_j(t)e^{a_j t}(\cos b_j t + i\sin b_j t).$$

Поскольку $a_j < 0$, то $P_j(t)e^{\lambda_j t} \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, каждое решение уравнения (V.5) стремится к нулю при $t \to \infty$. Значит и фундаментальная матрица $X(t)$ равномерно ограничена

$$\|X(t)\| \le M, \quad t \in [t_0, \infty),$$

кроме того, $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Для любого решения $x(t) = X(t)x(t_0)$ поэтому, если

$$|x(t_0)| < \delta = \varepsilon/M,$$

то

$$|x(t)| \le \|X(t)\| |x(t_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, нулевое решение устойчиво по Ляпунову, а поскольку $|x(t)| \to 0$, $t \to \infty$, то это решение и асимптотически устойчиво. □

## Литература

[1] *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991.

[2] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Иностранная литература, 1958.

[3] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений — М.: Едиториал УПСС, 2003.

[4] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.

[5] *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: ЛКИ, 2016.

[6] *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений — М.: КомКнига, 2007.

[7] *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

[8] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

[9] *Шамин Р. В.* Функциональный анализ от нуля до единицы. — М.: ЛЕНАНД/URSS, 2016.

[10] *Шамин Р. В.* Математические вопросы волн-убийц. — М.: ЛЕНАНД/URSS, 2016.

[11] *Шамин Р. В.* Полугруппы операторов. — М.: РУДН, 2008.

[12] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.